第四章 習題

4.1 馬克士威爾方程組的微分形式與積分形式在使用上有何差異？

【解】相同點：不論是微分形式或積分形式都是完整的方程組，互相關聯、互補、缺一不可。透過高斯定律與旋度(Stokes)定理互為等效。

相異點：(1) 積分形式著重區域性電磁場的整體性質描述，不適用於直接針對個別點的電磁場量的探討。

(2) 需要探討特別定點電磁場量的大小與變化情況時，需要一組偏微分方程式。

4.2 時變電場所感生的磁場如 $\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ 是否也是時變的？

【解】雖說時變電場如 $\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ 所感生的磁場也是時變的，然例外的是，當 $\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ 的結果為固定值時，也就是說電場是隨時間均勻(等速)變化，感生的磁場就不是時變的。同理，時變磁場 $\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ 所感生的電場是時變與否也取決於磁場是否隨時間均勻變化。

4.3 靜電場中點電荷具庫倫電場，如果點電荷作等速直線運動時，探討其周圍的場。

【解】(1) 靜止的點電荷為庫倫電場的源，遵守庫倫定律。運動中點電荷的電場不再具球形對稱的特性，因此庫倫定律不適用。

(2) 直線等速運動中的點電荷其電場雖也是因時間而變，然電場對時間的變化率卻為定值，因此沒有進一步感生磁場。

(3) 移動中的點電荷就形成電流，電流流動就感生磁場；因為是等速，也就沒有進一步感生電場。

(4) 綜合上述，因電場與磁場沒有進一步感生磁場及電場，所以電磁場不具輻射現象。

(5) 電磁場之所以能向外輻射傳播，是因為電荷被加速運動的結果。所謂的加速就是電場與磁場對時間的二次微分不為零，如 $\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\dfrac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2}\neq 0$ 及 $\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\neq 0$。

(6) 電荷作加速運動，如在兩極間來回振盪運動及橢圓軌道運動，即可輻射電磁波。

4.4 試分辨比較安培定律 $\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ 中的傳導電流(密度)與位移電流。

【解】(1) 傳導電流 $I_c=\int_s\vec{J}\cdot d\vec{s}$ 是電荷集體移動(電場作用)的結果；顧名思義需要導體才能導通；遵守歐姆定律(電壓、電阻、電流)與焦耳(熱)定律。

(2) 位移電流 $I_D=\int_s\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{s}$ 與自由電荷無關，取決於有無時變電場的存在；不需導體即能導通；不遵守歐姆定律與焦耳定律。唯在高頻時變電場中，介質也會有顯著的熱效應，但不是焦耳(電阻式)熱。

(3) 傳導電流 I_C 與位移電流 I_D 的單位都是安培、都會感生磁場、且都遵守安培定律。

4.5 證明 $y=\cos(\omega t\pm\kappa x)$為波方程式的解。

【解】 y 為時間 t 與位置 x 的函數，且其波方程式為 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}-c^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$

其中 ω 為角頻率且 $\omega=2\pi f$ (f 為頻率)、κ 為波數且 $\kappa=2\pi/\lambda$ (λ 為波長)

光速 $c=\omega/\kappa$ 或 $c=f\lambda$

另外，符號 ± 分別代表波朝負 x 或正 x 方向行進。

(1) $\dfrac{\partial y}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial t}\cos(\omega t\pm\kappa x)=-\omega\sin(\omega t\pm\kappa x)$

(2) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\dfrac{\partial}{\partial t}\left[-\omega\sin(\omega t\pm\kappa x)\right]=-\omega^2\cos(\omega t\pm\kappa x)$

(3) $\dfrac{\partial y}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\cos(\omega t\pm\kappa x)=\mp\kappa\sin(\omega t\pm\kappa x)$

(4) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\pm\kappa\sin(\omega t\pm\kappa x)\right]=-\kappa^2\cos(\omega t\pm\kappa x)$

分別改寫(2)式與(4)式為 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\omega^2 y$ 及 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\kappa^2 y$

整理得 $\dfrac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}}{-\omega^2}=\dfrac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{-\kappa^2}$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{\kappa^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$ 得證

4.6 證明 $y = e^{j\beta(x-ct)}$為波方程式的解。

【解】 y 為時間 t 與位置 x 的函數，其波方程式為 $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ 其中 β 為波數且 $c = \omega/\beta$。

(1) $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}e^{j\beta(x-ct)} = -j\beta c e^{j\beta(x-ct)}$

(2) $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left[-j\beta c e^{j\beta(x-ct)}\right] = -\beta^2 c^2 e^{j\beta(x-ct)}$

(3) $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}e^{j\beta(x-ct)} = j\beta e^{j\beta(x-ct)}$

(4) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[j\beta e^{j\beta(x-ct)}\right] = -\beta^2 e^{j\beta(x-ct)}$

$$\frac{(2)}{(4)} = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = \frac{-\beta^2 c^2 e^{j\beta(x-ct)}}{-\beta^2 e^{j\beta(x-ct)}} \rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$ 得證

4.7 試從安培定律 $\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ 推導電流與電荷密度的連續方程式。

【解】 對已知安培定律方程式取散度得

$$\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right) = \nabla\cdot\left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)$$

因為旋度不具散度，所以等號左側為零

整理右側 $\nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{D}\right) = 0$

從馬克士威爾方程組知道 $\nabla\cdot\vec{D} = \rho_v$

ρ_v 為體積電荷密度

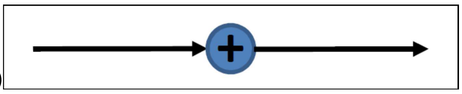
最後 $\nabla\cdot\vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t}\rho_v$

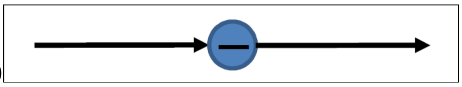
左側為電流密度的散度，量測該體積內的電流淨流量；

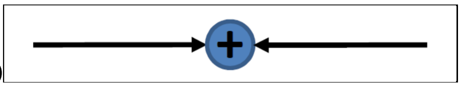
若散度為正，表示電流流出體積內的比流進的多；若為負，則反之。

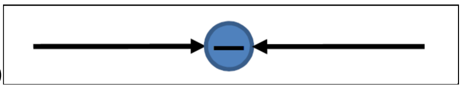
電流的存在是因為電荷的移動，正的電流密度散度表示該體積的電荷正在流失(發散)中，這也正是連續方程式的體積電荷密度側為負的原因。

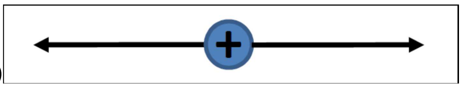
4.8 依據簡圖填入正確的選項。

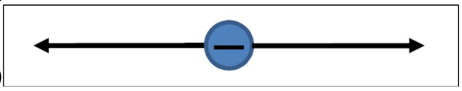
(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

(F) 

(a) 可能是電場($\vec{E}$ 、 $\vec{D}$)

(b) 不可能是電場($\vec{E}$ 、 $\vec{D}$)

(c) $\nabla \cdot \vec{D} > 0$

(d) $\nabla \cdot \vec{D} < 0$

(e) 可能是磁場($\vec{H}$ 、 $\vec{B}$)

【解】 (a) D、E

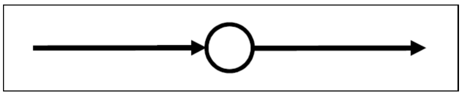
(b) A、B、C、F

(c) E

(d) D

(e) 無

4.9 依據簡圖填入正確的選項。

(a) 

(1) 圈內(可能、不可能)是(正、負)電荷(q)
(2) 圈內(可能、不可能)是(正、負)磁荷(m)
(3) [O / X] $\nabla \cdot \vec{D} = 0$
(4) [O / X] $\nabla \cdot \vec{D} \neq 0$
(5) [O / X] $\nabla \cdot \vec{B} = 0$
(6) [O / X] $\nabla \cdot \vec{B} \neq 0$

【解】(1) 不可能(可能只是電場)，所以無電荷

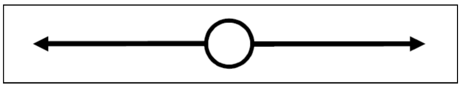
(2) 不可能(可能只是磁場)，所以無磁荷

(3) O

(4) X

(5) O

(6) X

(b) 

(1) 圈內(可能、不可能)是(正、負)電荷(q)

(2) 圈內(可能、不可能)是(正、負)磁荷(m)

(3) [O / X] $\nabla\cdot\vec{D}=0$

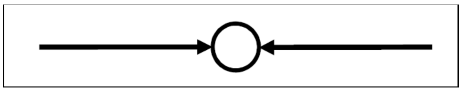
(4) [O / X] $\nabla\cdot\vec{D}\neq 0$

【解】(1) 可能、正

(2) 不可能

(3) X

(4) O

(c) 

(1) 圈內(可能、不可能)是(正、負)電荷(q)

(2) 圈內(可能、不可能)是(正、負)磁荷(m)

(3) [O / X] $\nabla\cdot\vec{D}=0$

(4) [O / X] $\nabla\cdot\vec{D}\neq 0$

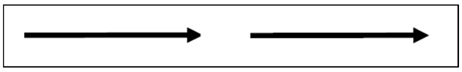
【解】(1) 可能、負

(2) 不可能

(3) X

(4) O

4.10 依據簡圖填入正確的選項。

(a) 

(1) [O / X]可能是電場($\vec{E}$ 、 $\vec{D}$)

(2) [O / X]可能是磁場($\vec{H}$ 、 $\vec{B}$)

(3) [O / X] $\nabla\cdot\vec{D}=0$

(4) [O / X] $\nabla\cdot\vec{D}\neq 0$

(5) [O / X] $\nabla\cdot\vec{B}=0$

(6) [O / X] $\nabla\cdot\vec{B}\neq 0$

【解】(1) O

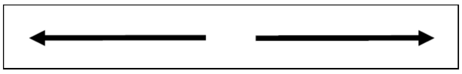
(2) O

(3) O

(4) X

(5) O

(6) X

(b) 

(1) [O / X]可能是電場($\vec{E}$ 、 $\vec{D}$)

(2) [O / X]可能是磁場($\vec{H}$ 、 $\vec{B}$)

(3) [O / X]$\nabla \cdot \vec{D} = 0$

(4) [O / X]$\nabla \cdot \vec{D} \neq 0$

(5) [O / X]$\nabla \cdot \vec{B} = 0$

(6) [O / X]$\nabla \cdot \vec{B} \neq 0$

【解】(1) O

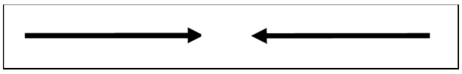
(2) X

(3) X

(4) O(承(1)，靜電場的存在是因為有靜(正)電荷)

(5) O

(6) X

(c) 

(1) [O / X]可能是電場($\vec{E}$ 、 $\vec{D}$)

(2) [O / X]可能是磁場($\vec{H}$ 、 $\vec{B}$)

(3) [O / X]$\nabla \cdot \vec{D} = 0$

(4) [O / X]$\nabla \cdot \vec{D} \neq 0$

(5) [O / X]$\nabla \cdot \vec{B} = 0$

(6) [O / X]$\nabla \cdot \vec{B} \neq 0$

【解】(1) O

(2) X

(3) X

(4) O(承(1)，靜電場的存在是因為有靜(負)電荷)

(5) O

(6) X